

模範解答

I

(1) 条件から

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2 \\ &= 8 - 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} + 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

よって、 $\vec{c}$ の大きさは $\sqrt{2}$ である。

また

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= -|\vec{a}|^2 + \sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角は 90° である。

(2) $\vec{x} = (\cos \theta)\vec{a} + (\sin \theta)(\sqrt{2}\vec{b} - \vec{a})$ となる。よって、(1) の $\vec{c}$ をもちいて $\vec{x} = (\cos \theta)\vec{a} + (\sin \theta)\vec{c}$ と表される。(1) より

$$\begin{aligned} |\vec{x}|^2 &= |(\cos \theta)\vec{a} + (\sin \theta)\vec{c}|^2 \\ &= (\cos^2 \theta)|\vec{a}|^2 + (\sin^2 \theta)|\vec{c}|^2 + 2(\cos \theta \sin \theta)\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 8 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \\ &= 8 \cos^2 \theta + 2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= 3(2 \cos^2 \theta - 1) + 5 \\ &= \mathbf{3 \cos 2\theta + 5} \end{aligned}$$

(3) $0^\circ \leq 2\theta < 720^\circ$ なので $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$ であり、 $|\vec{x}|^2$ の値の範囲は $5 - 3 \leq |\vec{x}|^2 \leq 5 + 3$ である。

- 最大値をとるとき、 $2\theta = 0^\circ, 360^\circ$
- 最小値をとるとき、 $2\theta = 180^\circ, 540^\circ$

なので、最大値 M と最小値 m は以下の通り。

- $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ のとき $\mathbf{M = 2\sqrt{2}}$
- $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ のとき $\mathbf{m = \sqrt{2}}$

$$(4) \overrightarrow{OF} = \frac{\sqrt{8-2}}{2\sqrt{2}}\vec{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}, \overrightarrow{OF'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{FP}| + |\overrightarrow{F'P}| &= \left| \vec{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} \right| + \left| \vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} \right| \\ &= \left| \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \vec{a} + (\sin \theta) \vec{c} \right| + \left| \left(\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \vec{a} + (\sin \theta) \vec{c} \right| \\ &= \sqrt{8 \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 2 \sin^2 \theta} + \sqrt{8 \left(\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{8 \cos^2 \theta - 8\sqrt{3} \cos \theta + 6 + 2 \sin^2 \theta} + \sqrt{8 \cos^2 \theta + 8\sqrt{3} \cos \theta + 6 + 2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{6 \cos^2 \theta - 8\sqrt{3} \cos \theta + 8} + \sqrt{6 \cos^2 \theta + 8\sqrt{3} \cos \theta + 8} \\ &= \sqrt{2(3 \cos^2 \theta - 4\sqrt{3} \cos \theta + 4)} + \sqrt{2(3 \cos^2 \theta + 4\sqrt{3} \cos \theta + 4)} \\ &= \sqrt{2} \left(\sqrt{(\sqrt{3} \cos \theta - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} \cos \theta + 2)^2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\left| \sqrt{3} \cos \theta - 2 \right| + \left| \sqrt{3} \cos \theta + 2 \right| \right) \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ なので, $-\sqrt{3} - 2 \leq \sqrt{3} \cos \theta - 2 \leq \sqrt{3} - 2$, $-\sqrt{3} + 2 \leq \sqrt{3} \cos \theta + 2 \leq \sqrt{3} + 2$ である。 $\sqrt{3} - 2 < 0$, $-\sqrt{3} + 2 > 0$ なので,

$$\sqrt{3} \cos \theta - 2 < 0, \sqrt{3} \cos \theta + 2 > 0$$

である。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{FP}| + |\overrightarrow{F'P}| &= \sqrt{2} \left(-\sqrt{3} \cos \theta + 2 + \sqrt{3} \cos \theta + 2 \right) \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって, 点 P の軌跡は, 点 F, F' を焦点とし, 長軸の長さ $4\sqrt{2}$, 短軸の長さ $2\sqrt{2}$ の楕円である。

模範解答

II

(1) さいころを 1 回投げるとき,

- +1 進む確率 P_1 は $P_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- +2 進む確率 P_2 は $P_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

である。

$X_2 = 3$ となるのは, 2 回の試行での移動量の和が 3 になるときである。移動量は 1 か 2 なので, 和が 3 となる組み合わせは (1, 2) または (2, 1) の場合である。これらの事象は互いに排反であるため, 求める確率は

$$P_1P_2 + P_2P_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

(2) n 回後の座標 X_n が奇数である確率は p_n で, 偶数である確率は $1 - p_n$ である。 $n + 1$ 回後の座標 X_{n+1} が奇数になるのは, 以下の 2 つの場合である。

(i) X_n が奇数で, 偶数の移動 (+2) が起こるときである。(奇数に 2 を足すと奇数になる。) 確率は

$$p_n P_2 = \frac{1}{3} p_n$$

(ii) X_n が偶数で, 奇数の移動 (+1) が起こるときである。(偶数に 1 を足すと奇数になる。) 確率は

$$(1 - p_n) P_1 = \frac{2}{3} (1 - p_n)$$

これらは互いに排反であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} (1 - p_n) \\ &= -\frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(3) (2) で求めた漸化式 $p_{n+1} = -\frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3}$ を解く。特性方程式 $\alpha = -\frac{1}{3} \alpha + \frac{2}{3}$ を解くと

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \alpha &= \frac{2}{3} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、漸化式は次のように変形できる。

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は、初項 $p_1 - \frac{1}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。

ここで、 $n = 1$ のとき、 X_1 は確率 $\frac{2}{3}$ で 1 (奇数)、確率 $\frac{1}{3}$ で 2 (偶数) となるため、

$$p_1 = \frac{2}{3}$$

である。ゆえに初項は

$$p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

したがって、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\ p_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

求める確率は X_n が偶数である確率 $1 - p_n$ である。よって、

$$\begin{aligned} 1 - p_n &= 1 - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \end{aligned}$$

模範解答

III

- (1) $f(x)$ の定義域は $1 \leq x \leq e^2$ である。底 e は 1 より大きいため、対数関数 $\log x$ は増加する。よって、

$$\log 1 \leq \log x \leq \log e^2$$

したがって、

$$0 \leq t \leq 2$$

(答) $0 \leq t \leq 2$

- (2) 関数 $g(t)$ を次のように表す。

$$g(t) = t^2 - at = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

これは下に凸な放物線であり、軸は $t = \frac{a}{2}$ である。区間 $0 \leq t \leq 2$ における最小値 $m(a)$ を、軸の位置で場合分けして求める。

(i) 軸がこの区間の左側にあるとき、 $\frac{a}{2} < 0$ であるから $a < 0$ である。したがって、この区間で $g(t)$ は増加し、 $t = 0$ で最小値をとる。

$$m(a) = g(0) = 0$$

(ii) 軸がこの区間内にあるとき、 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 2$ であるから $0 \leq a \leq 4$ である。このとき、頂点で最小値をとる。

$$m(a) = -\frac{a^2}{4}$$

(iii) 軸がこの区間の右側にあるとき、 $2 < \frac{a}{2}$ であるから $4 < a$ である。このとき、この区間で $g(t)$ は減少し、 $t = 2$ で最小値をとる。

$$m(a) = g(2) = 4 - 2a$$

以上をまとめると

$\left(a = 4 \text{ のとき, } -\frac{a^2}{4} = 4 - 2a \text{ なので}\right)$

$$m(a) = \begin{cases} 0 & (a < 0) \\ -\frac{a^2}{4} & (0 \leq a < 4) \\ 4 - 2a & (4 \leq a) \end{cases}$$

(3) 放物線 $g(t) = t^2 - at$ ($0 \leq t \leq 2$) は下に凸なので、最大値は区間の端点 $t = 0$ または $t = 2$ のいずれかでとる。それぞれの端点での値は

$$g(0) = 0, \quad g(2) = 4 - 2a$$

である。最大値が 3 となるためには、少なくとも一方の値が 3 であり、かつ他方が 3 以下である必要がある。

$g(0) = 0 < 3$ であるから、最大値をとるのは $t = 2$ のときでなければならない。よって

$$4 - 2a = 3$$

これを解くと

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

このとき、もう一方の端点の値は $g(0) = 0$ であり、 $3 > g(0)$ を満たすため、確かに最大値は 3 となる。

$$(\text{答}) \ a = \frac{1}{2}$$

模範解答

IV

(1) 求める交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} -x^2 + 2 &= 1 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

よって

$$x = \pm 1$$

(2) 領域 D を直線 l の周りに 1 回転させるとき, 点 (x, y) の軌跡 (円) の半径は y 座標と直線 l との距離である。よって, 放物線上の点 $(x, -x^2 + 2)$ について, 求める半径 $r(x)$ は

$$r(x) = |(-x^2 + 2) - 1| = |-x^2 + 1| = |1 - x^2|$$

となる。 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲では $1 - x^2 \geq 0$ であるから

$$r(x) = 1 - x^2$$

よって, 求める半径は $1 - x^2$ である。

(3) $r(x)^2$ が偶関数であることに注意すると, 回転体の体積は, (2) より,

$$V = \pi \int_{-1}^1 r(x)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx$$

となる。 $(1 - x^2)^2$ を展開すると

$$(1 - x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$$

であるから

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx \\ &= 2\pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{15 - 10 + 3}{15} \end{aligned}$$

よって

$$V = \frac{16\pi}{15}$$